

Лабораторная работа 2. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассматривается задача исследования на экстремум функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr} \quad (2.1)$$

с заданными граничными условиями:

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad (2.2)$$

где **интегрант** $F(x, y, y')$ – непрерывная функция трёх переменных и дифференцируемая функция двух своих последних аргументов.

1. Необходимое условие экстремума функционала: уравнение Эйлера

Как известно из курса вариационного исчисления, функция, на которой достигается экстремум в задаче (2.1), (2.2), должна удовлетворять дифференциальному уравнению (**уравнению Эйлера**)

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0.$$

Обратное неверно: на произвольном решении уравнения Эйлера экстремум функционала может и не достигаться.

Любое решение уравнения Эйлера называется **экстремалью**. Решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям (2.2), называется **допустимой экстремалью**.

Так как уравнение Эйлера дополняется не начальными, а граничными условиями, то теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения здесь неприменима. Иными словами, допустимая экстремаль не обязательно существует, а если существует, то не обязательно единственна.

Алгоритм решения в Maxima.

1. Составить уравнение Эйлера, т.е. вычислить все входящие в него производные и записать их в одном выражении, приравняв к нулю « $= 0$ ».

2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. функцию **ode2** из лабораторной работы 1).

3. Найти частное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.2) (см. функцию **bc2** из лабораторной работы 1).

Замечание о том, как составить уравнение Эйлера.

Прежде всего, заметим, что полная производная $\frac{dF_{y'}}{dx}$, входящая в уравнение Эйлера, вычисляется по формуле

$$\frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} y''.$$

На этапе формирования уравнения, чтобы не загромождать запись, можно ввести обозначение, записав производную 'diff(y,x) в отдельную переменную, например,

Dy:'diff(y,x);

Тогда вычисление F_y запишется как

diff(F, Dy);

2. Частный случай: интеграл импульса

Если интегрант $F = F(x, y')$ не зависит явно от y , то имеет место *интеграл импульса*

$$F_{y'} = \text{const.} \quad (2.3)$$

Алгоритм решения в Maxima.

1. Составить интеграл импульса. Выражение необходимо завершить « = %k », где %k – имя произвольной константы const из (2.3) (вообще, константе из (2.3) можно дать любое имя, которое бы начиналось с символа « % » и не совпадало бы с именами системных констант).

2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения.

3. Найти частное решение, с помощью граничных условий (2.2) определив константы %c и %k.

Пример поиска частного решения.

Пусть имеется общее решение некоторого дифференциального уравнения, записанное в переменную sol:

sol: y=%k*x+%c \$

Требуется найти частное решение, удовлетворяющее граничным условиям $y(0)=1$, $y(2)=3$.

Решение. Создадим переменные, в которые запишем граничные условия:

x1: 0\$

y1: 1\$

x2: 2\$

y2: 3\$

Подставим граничные условия слева и справа в общее решение, чтобы получить систему линейных уравнения относительно неизвестных %k и %c.

linEq1: subst([x=x1,y=y1],sol);

linEq2: subst([x=x2,y=y2],sol);

1=%c

3=2*%k+%c

Затем с помощью функции **solve** решим систему уравнений и запишем результат в переменную con:

con: solve([linEq1, linEq2], [%k,%c]);

[[%k=1,%c=1]]

Подставив (с помощью функции **subst**) значения вычисленных констант в общее решение, получим частное решение:

$$\text{subst}(\text{con}, \text{sol});$$

$$y=x+1$$

3. Задание

Для функционалов **a)**, **b)** найти допустимые экстремали и построить их графики. Допустимую экстремаль функционала **b)** найти с помощью интеграла импульса.

Вариант 1.

$$\text{a). } J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx; \quad y(-1)=3; \quad y(1)=1;$$

$$\text{b). } J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'e^{2x} + \sin^2 x) dx; \quad y(0)=1; \quad y(2)=-2;$$

Вариант 2.

$$\text{a). } J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2) dx; \quad y(-1)=2; \quad y(1)=4;$$

$$\text{b). } J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y'\sin 2x - x^2) dx; \quad y(0)=1; \quad y(2)=-1;$$

Вариант 3.

$$\text{a). } J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 4x^2 y + x \cos x) dx; \quad y(-1)=2; \quad y(1)=0.5;$$

$$\text{b). } J(y) = \int_0^2 (y'^2 - 4y' \cos 2x + 5 \sin 3x) dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=-3;$$

Вариант 4.

$$\text{a). } J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 9y^2 + 2xy - x \sin x) dx; \quad y(0)=1; \quad y(2)=2;$$

$$\text{b). } J(y) = \int_1^3 \left(y'^2 - \frac{4y'}{x} + x \sin x \right) dx; \quad y(1)=1; \quad y(3)=-2;$$

Вариант 5.

$$\text{a). } J(y) = \int_{-2}^0 (y'^2 - 4y^2 + 2y + x e^{2x}) dx; \quad y(-2)=0; \quad y(0)=1;$$

$$\text{b). } J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 2y'e^x + \cos x) dx; \quad y(-1)=2; \quad y(1)=3;$$

Вариант 6.

$$\text{a). } J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 9y^2 + 2y \sin x - x^2 e^x) dx; \quad y(0)=1; \quad y(1)=-1;$$

$$\text{b). } J(y) = \int_{-1}^1 \left(y'^2 - \frac{2y'}{1+x^2} + e^{2x} \right) dx; \quad y(-1)=0; \quad y(1)=3;$$

Вариант 7.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 6ye^x + 2x \cos x) dx$; $y(-1)=1$; $y(1)=3$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y'e^x \cos x - \sin x) dx$; $y(-1)=1$; $y(1)=2$;

Вариант 8.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + y^2 + 4ye^x - x \sin x) dx$; $y(-1)=1$; $y(1)=3$;
- b). $J(y) = \int_1^3 (y'^2 - y' \ln x + 2x) dx$; $y(1)=2$; $y(3)=-1$;

Вариант 9.

- a). $J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 8ye^{2x} + 3x^2) dx$; $y(-1)=1$; $y(1)=3$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y' + y'^2 \cos^2 x - \sin^2 x) dx$; $y(-1)=1$; $y(1)=-2$;

Вариант 10.

- a). $J(y) = \int_0^2 (2y'^2 + 2y^2 + y \cos x - 5x) dx$; $y(0)=2$; $y(2)=2$;
- b). $J(y) = \int_1^3 (y' + y'^2 \sin^2 x + e^{2x}) dx$; $y(1)=-1$; $y(3)=4$;

Вариант 11.

- a). $J(y) = \int_0^2 (2y'^2 + 2y^2 + xy \sin x + 6xe^x) dx$; $y(0)=1$; $y(2)=2$;
- b). $J(y) = \int_0^2 (y' + y'^2 e^x - \sin x) dx$; $y(0)=2$; $y(2)=-1$;

Вариант 12.

- a). $J(y) = \int_0^2 (2y'^2 - 2y^2 + y \sin 2x - x^2 \sin x) dx$; $y(0)=-1$; $y(2)=4$;
- b). $J(y) = \int_{0.5}^{1.5} (y' + 2xy'^2 - \cos 2x) dx$; $y(0.5)=1$; $y(1.5)=2$;

Вариант 13.

- a). $J(y) = \int_0^2 (2y'^2 - 2y^2 + y \cos x + xe^{2x}) dx$; $y(0)=1$; $y(2)=2$;
- b). $J(y) = \int_1^2 (y' + xy'^2 - x^2 y') dx$; $y(1)=2$; $y(2)=-1$;

Вариант 14.

- a). $J(y) = \int_1^2 (2y'^2 - 2y^2 + ye^{2x} \sin 3x - x \sin x) dx$; $y(1)=2$; $y(2)=3$;
- b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y' + e^x y'^2 - xy') dx$; $y(-1)=0$; $y(3)=2$;

Вариант 15.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + ye^x + 4xe^{2x}) dx; \quad y(-1)=1; \quad y(1)=2;$

b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y' + y'^2 \sec^2 x + xy') dx; \quad y(-1)=-1; \quad y(1)=0;$

Вариант 16.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + 3ye^x \cos x - 5x^2 e^{2x}) dx; \quad y(-1)=2; \quad y(1)=1;$

b). $J(y) = \int_0^2 (y' + y'^2 + x^2 y'^2) dx; \quad y(0)=1; \quad y(2)=-2;$

Вариант 17.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + ye^{2x} + 4\sin x) dx; \quad y(-1)=4; \quad y(1)=3;$

b). $J(y) = \int_{-0.5}^{0.5} (y' + y'^2 \cos 2x - \sin 2x) dx; \quad y(-0.5)=1; \quad y(0.5)=0.5;$

Вариант 18.

a). $J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + 3ye^{2x} \sin x - 5\cos x) dx; \quad y(-1)=3; \quad y(1)=4;$

b). $J(y) = \int_{-1}^1 (y' + y'^2 e^{2x} - 2xy') dx; \quad y(-1)=2; \quad y(1)=1;$

Вариант 19.

a). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 4y^2 + 6ye^{2x} \cos x - x^2) dx; \quad y(0)=1; \quad y(2)=3;$

b). $J(y) = \int_{0.5}^{1.5} ((2-6x)y' + y'^2 \cos^2 x) dx; \quad y(0.5)=-1; \quad y(1.5)=-2;$

Вариант 20.

a). $J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 4y^2 + 4ye^x \sin x + x^2 \sin x) dx; \quad y(0)=2; \quad y(2)=3;$

b). $J(y) = \int_0^2 \left(y'^2 - \frac{2y'}{\sqrt{1+x^2}} + \sin 3x \right) dx; \quad y(0)=-1; \quad y(2)=3;$

Литература

[1] Васильева А. Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.