

Лабораторная работа 7. Метод Ритца решения простейшей задачи вариационного исчисления.

В методе Ритца решение вариационной задачи

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

ищется в виде линейной комбинации известных, заданных заранее функций – $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ (они называются **базисными**):

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_k(x).$$

После подстановки такой линейной комбинации в функционал его можно рассматривать как функцию неизвестных коэффициентов комбинации – $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, т.е. $J(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Коэффициенты подбираются так, чтобы функционал принимал экстремальное значение. Таким образом, вариационная задача сводится к задаче исследования на экстремум функции многих переменных.

Линейная комбинация базисных функций должна удовлетворять граничным условиям при любых значениях коэффициентов. Если граничные условия однородные (нулевые), то и базисные функции должны удовлетворять однородным граничным условиям. Если же граничные условия неоднородные, то можно применить следующий прием. Будем искать решение в виде линейной комбинации базисных функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям, но прибавим к этой комбинации какую-либо функцию $\phi_0(x)$, удовлетворяющую заданным граничным условиям:

$$y(x) = \phi_0(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(x); \quad \phi_0(x_1) = y_1, \quad \phi_0(x_2) = y_2; \quad \phi_i(x_1) = \phi_i(x_2) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.1)$$

Коэффициент при функции $\phi_0(x)$ не варьируется и предполагается всегда равным 1. Таким образом, полученная линейная комбинация при любых значениях варьируемых параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ будет удовлетворять заданным граничным условиям.

1. Решение задачи в Maxima

Алгоритм решения.

1. Задав базисные функции $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$, составить $y(x)$ вида (7.1) и найти $y'(x)$. Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ на данном шаге являются неизвестными и подлежат определению.
2. Подставить получившиеся в пункте 1 выражения $y(x)$ и $y'(x)$ в интегрант F . Проинтегрировать результат подстановки на отрезке $[x_1, x_2]$ с помощью функции **integrate**, например, так **integrate(F, x, x1, x2)**.
3. Найти набор коэффициентов $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$, удовлетворяющий необходимому условию экстремума для получившейся в пункте 2 функции многих переменных $J(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Как известно из курса математического анализа, это можно сделать следующим образом. Надо найти градиент функции $J(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и приравнять его нулевому вектору. Решением получившейся системы уравнений и будет $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$.

2. Пример базисных функций

Примером базисных функций для метода Ритца могут служить линейная функция $\phi_0(x)$, соединяющая точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , и набор тригонометрических функций $\phi_i(x), i = \overline{1, n}$, удовлетворяющих однородным граничным условиям:

$$\phi_0(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \phi_1(x) = \sin \pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \phi_2(x) = \sin 2\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \dots, \quad \phi_n(x) = \sin n\pi \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Чтобы задать множество однородных базисных функций в Maxima, можно воспользоваться оператором цикла **for**:

for i:1 thru n do (expr1, expr2, ...).

Следует отметить, что выражения внутри цикла разделяются запятыми, а не символами «;» или «\$».

Константы, на которые следует умножать базисные функции, могут быть созданы в цикле с помощью функции конкатенации (например, `concat(a,i)`) и помещены в список для того, чтобы затем быть использованными при вычислении градиента функции J .

3. Задание

Для своего варианта из лабораторной работы 2 (задача **а**)) с помощью метода Рунге найти экстремаль, подобрав базисные функции так, чтобы они давали лучшее приближение к точному решению. Сравнить полученное приближенное решение с экстремалью из лабораторной работы 2 (задача **а**)), построив их графики.