

Лабораторная работа 4. Задача Больца. Условия трансверсальности.

Рассматривается задача исследования на экстремум функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \psi(y(x_1), y(x_2)) \rightarrow \text{extr}, \quad (4.1)$$

где *интегрант* $F(x, y, y')$ – непрерывная функция трёх переменных и дифференцируемая функция двух своих последних аргументов, *терминант* $\psi(y(x_1), y(x_2))$ – дифференцируемая по каждому аргументу функция. Задача (4.1) называется *задачей Больца*.

1. Необходимое условие экстремума в задаче Больца

Функция, на которой достигается экстремум в задаче Больца, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0$$

и условиям

$$F_{y'}(x_1) = \psi_{y(x_1)}, \quad (4.2)$$

$$F_{y'}(x_2) = -\psi_{y(x_2)}. \quad (4.3)$$

Условия (4.2), (4.3) называются *условиями трансверсальности*. Их смысл следующий: если из всех экстремалей выбрать функцию, доставляющую экстремум функционалу (4.1), то эта функция будет удовлетворять условиям трансверсальности (4.2) и (4.3).

2. Решение задачи в Maxima

Алгоритм решения.

1. Составить уравнение Эйлера (см. лабораторную работу 2).
2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. лабораторную работу 1).
3. Найти частное решение, удовлетворяющее условиям трансверсальности (4.2) и (4.3).

Замечание об условиях трансверсальности.

Левые части условий трансверсальности ($F_{y'}(x_1)$ и $F_{y'}(x_2)$) вычисляются по аналогии с лабораторной работой 3.

Для того чтобы вычислить выражение $\psi_{y(x_1)}$ в правой части (4.2) (для $\psi_{y(x_2)}$ в правой части (4.3) алгоритм аналогичен) необходимо сделать следующее.

1. Найти производную функции $\psi(y(x_1), y(x_2))$ по $y(x_1)$ в предположении, что $y(x_1)$ – независимая переменная. Например, пусть $\psi(y(x_1), y(x_2)) = y^2(x_1) + y(x_1)y(x_2) + y^2(x_2)$, тогда $\psi_{y(x_1)} = 2y(x_1) + y(x_2)$.

2. В две отдельные переменные Maxima записать общее решение уравнения Эйлера с $x = x_1$ и с $x = x_2$, соответственно.

3. Переменные из пункта 2 подставить в выражение $\psi_{y(x_1)}$ из пункта 1 вместо $y(x_1)$ и $y(x_2)$, соответственно.

Пример использования опций color и legend функции plot2d.

Построить графики функций $y = \sin(x)$ и $y = \cos(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение.

```
plot2d([sin(x), cos(x)], [x,0,%pi], [xlabel,"x"], [ylabel,"y(x)"], [color, red, green], [legend, "y(x)=sin(x)", "y(x)=cos(x)"]);
```

3. Задание

Для своего варианта найти допустимую экстремаль (т.е. решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям трансверсальности) в задаче Больца. Сравнить полученную экстремаль с экстремальми из лабораторных работ 2 (задача а) и 3, построив их графики.

Вариант 1.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2) dx + 4y^2(-1) + 2y(-1) + 2y^2(1) - y(1).$$

Вариант 2.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 - 4y^2 + 2xy - x^2) dx + y^2(-1) + y(-1).$$

Вариант 3.

$$J(y) = \int_{-1}^1 y'^2 + 4y^2 + 4x^2 y + x \cos x \, dx + y^2(1) + y(1).$$

Вариант 4.

$$J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 9y^2 + 2xy - x \sin x) dx + y^2(0) - y^2(2).$$

Вариант 5.

$$J(y) = \int_{-2}^0 (y'^2 - 4y^2 + 2y + xe^{2x}) dx + y^2(-2) + y^2(0).$$

Вариант 6.

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 - 9y^2 + 2y \sin x - x^2 e^x) dx + y^2(0) + y(0)y(1) + y^2(1).$$

Вариант 7.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 6ye^x + 2x \cos x) dx + y^2(-1) - y(-1)y(1) + y^2(1).$$

Вариант 8.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + y^2 + 4ye^x - x \sin x) dx + y^2(-1) + 2y(-1)y(1).$$

Вариант 9.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4y^2 + 8ye^{2x} + 3x^2) dx + 2y(-1)y(1) + y^2(1).$$

Вариант 10.

$$J(y) = \int_0^2 (2y'^2 + 2y^2 + y \cos x - 5x) dx + 2y^2(0) - y(0)y(2) - y^2(2) - 5y(2).$$

Вариант 11.

$$J(y) = \int_0^2 (2y'^2 + 2y^2 + xy \sin x + 6xe^x) dx + y(0) + y(0)y(2) - y^2(2).$$

Вариант 12.

$$J(y) = \int_0^2 (2y'^2 - 2y^2 + y \sin 2x - x^2 \sin x) dx + y^2(0) + y(0)y(2) - 3y(2).$$

Вариант 13.

$$J(y) = \int_0^2 (2y'^2 - 2y^2 + y \cos x + xe^{2x}) dx + y^2(0) - 2y(0) + y^2(2).$$

Вариант 14.

$$J(y) = \int_1^2 (2y'^2 - 2y^2 + ye^{2x} \sin 3x - x \sin x) dx + y(1)y(2) + y(1) + y(2).$$

Вариант 15.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + ye^x + 4xe^{2x})dx + 2y^2(-1) - y(-1)y(1) + 3y^2(1) + 2y(1).$$

Вариант 16.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + 3ye^x \cos x - 5x^2 e^{2x})dx + y(-1)y(1) - y(-1) - y(1).$$

Вариант 17.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + ye^{2x} + 4 \sin x)dx + y^2(-1) - 4y(-1) + 3y(-1)y(1).$$

Вариант 18.

$$J(y) = \int_{-1}^1 (2y'^2 + 2y^2 + 3ye^{2x} \sin x - 5 \cos x)dx - y^2(-1) + 4y(-1) + 3y^2(1).$$

Вариант 19.

$$J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 4y^2 + 6ye^{2x} \cos x - x^2)dx + 3y^2(0) + 2y(0) - y^2(2).$$

Вариант 20.

$$J(y) = \int_0^2 (y'^2 + 4y^2 + 4ye^x \sin x + x^2 \sin x)dx + y^2(0) - 2y(2) + y^2(2).$$

Литература

[1] Ожегова А.В., Насибуллина Р.Г. Вариационное исчисление. Задачи, алгоритмы, примеры. Казань, 2013. – 40 с.