

Лабораторная работа 5. Изопериметрическая задача.

Изопериметрической задачей в узком смысле слова называется задача нахождения экстремума функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr} \quad (5.1)$$

при граничных условиях

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (5.2)$$

и при дополнительном ограничении-равенстве на длину кривой, соединяющей точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) :

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{const.}$$

Изопериметрическая задача в широком смысле слова – это задача исследования на экстремум функционала (5.1) с граничными условиями (5.2) и с ограничениями-равенствами в виде интегралов

$$J_k(y) = \int_{x_1}^{x_2} F_k(x, y, y') dx = l_k = \text{const}; \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.3)$$

Ограничения (5.3) называются **условиями изопериметричности**.

Для нахождения экстремали в задаче (5.1)–(5.3) применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Составим вспомогательный функционал (**функционал Лагранжа**)

$$L(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left(F(x, y, y') + \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(x, y, y') \right) dx$$

и для этого функционала найдем экстремаль как решение уравнения Эйлера. Неизвестные произвольные константы общего решения уравнения Эйлера K_1 , K_2 и неопределенные множители Лагранжа λ_k находятся из граничных условий (5.2) и условий изопериметричности (5.3).

1. Решение задачи в Maxima

Алгоритм решения.

1. Составить уравнение Эйлера для функционала Лагранжа, т.е. составить уравнение Эйлера для модифицированного интегранта $F(x, y, y') + \sum_{k=1}^n \lambda_k F_k(x, y, y')$. Например, в случае одного условия изопериметричности это можно записать так $F + \%lambda * F1$, где F – интегрант исходного функционала, $F1$ – подынтегральное выражение условия изопериметричности, $\%lambda$ – множитель Лагранжа.

2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. лабораторную работу 1).

3. Найти частное решение, удовлетворяющее условиям (5.2) и условиям изопериметричности (5.3).

Замечание о поиске частного решения в изопериметрической задаче.

Предположим, что в рассматриваемой задаче только одно условие изопериметричности, и множитель Лагранжа обозначен как $\%lambda$. Для того, чтобы определить константы $\%k1$, $\%k2$ и $\%lambda$, содержащиеся в общем решении, воспользуемся условиями (5.2) и (5.3).

Подставив в общее решение (с помощью функции **subst**) $x = x_1$ и $y = y_1$, получим первое уравнение относительно $\%k1$, $\%k2$ и $\%lambda$. Подставив в общее решение $x = x_2$ и $y = y_2$, получим второе уравнение относительно $\%k1$, $\%k2$ и $\%lambda$.

Третье уравнение относительно $\%k1$, $\%k2$ и $\%lambda$ можно получить следующим образом. Подставим общее решение и его производную в подынтегральное выражение условия изопериметричности. Проинтегрируем результат подстановки на отрезке $[x_1, x_2]$ с помощью функции **integrate** и приравняем

результат константе из правой части условия изопериметричности (5.3). Например, это можно записать так $\text{integrate}(F1, x, x1, x2)=1$, где 1 – переменная, в которую записано значение константы из правой части условия изопериметричности.

Далее, составив систему из трех уравнений, решим ее и определим значения неизвестных %k1, %k2 и %lambda.

2. Задание

Для своего варианта из лабораторной работы 2 (задача а)) найти экстремаль, учитывая заданное условие изопериметричности. Сравнить полученную экстремаль с экстремалью из лабораторной работы 2 (задача а)), построив их графики.

Вариант 1. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 1.$

Вариант 2. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 4.$

Вариант 3. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 0.5.$

Вариант 4. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 2.$

Вариант 5. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = -1.$

Вариант 6. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 1.5.$

Вариант 7. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 3.$

Вариант 8. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = -3.$

Вариант 9. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 2.$

Вариант 10. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = -2.$

Вариант 11. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 2.5.$

Вариант 12. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 6.$

Вариант 13. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 4.$

Вариант 14. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = -4.$

Вариант 15. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 0.$

Вариант 16. $\int_{x_1}^{x_2} (x + y) dx = 4.$

Вариант 17. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 6.$

Вариант 18. $\int_{x_1}^{x_2} (x^2 + y) dx = 4.$

Вариант 19. $\int_{x_1}^{x_2} (x^2 + y) dx = 5.$

Вариант 20. $\int_{x_1}^{x_2} (\sin x + y) dx = 5.$