

Лабораторная работа 3. Нахождение экстремали в задаче со свободной границей. Естественное граничное условие.

Рассматривается задача исследования на экстремум функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr} \quad (3.1)$$

с заданным граничным условием на левой границе

$$y(x_1) = y_1. \quad (3.2)$$

На правой границе – в точке x_2 значение функции может быть произвольным, то есть экстремум функционала (3.1) ищется в классе функций с закрепленным левым концом и свободным правым.

1. Необходимое условие экстремума в задаче со свободной границей

Функция, на которой в таких задачах достигается экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0,$$

условию (3.2) и

$$F_{y'}(x_2) = 0 \quad (3.3)$$

Условие (3.3) называется *естественным*. Его смысл следующий: если из всех экстремалей, удовлетворяющих заданному граничному условию слева и различным граничным условиям справа, выбрать функцию, доставляющую экстремум функционалу, то эта функция будет удовлетворять естественному граничному условию (3.3) на правом конце.

2. Решение задачи в Maxima

Алгоритм решения.

1. Составить уравнение Эйлера (см. лабораторную работу 2).
2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. лабораторную работу 1).
3. Найти частное решение, удовлетворяющее условиям (3.2) и (3.3).

Замечание о поиске частного решения в задаче со свободной правой границей.

Для того, что определить константы %k1 и %k2 из общего решения, воспользуемся условиями (3.2) и (3.3).

Подставив в общее решение (с помощью функции **subst**) $x = x_1$ и $y = y_1$, получим первое уравнение относительно %k1 и %k2.

В производную $F_{y'}$ за место y подставим общее решение, а за место y' производную общего решения. Затем в получившееся выражение подставим $x = x_2$. Заключим выражение « = 0 » (см. формулу (3.3)). Это будет вторым уравнением относительно %k1 и %k2.

Пример того, как нарисовать несколько графиков в одном графическом окне.

Построить графики функций $y = \sin(x)$ и $y = \cos(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. `plot2d([sin(x), cos(x)], [x, 0, %pi], [xlabel, "x"], [ylabel, "y(x)"]);`

3. Задание

Для своего варианта из лабораторной работы 2 (задача **а**)) найти экстремаль, предполагая, что граничные условия на правой границе не заданы. Сравнить полученную экстремаль с экстремалью из лабораторной работы 2 (задача **а**)), построив их графики.

Литература

- [1] Кузнецов Ю.А., Семенов А.В. Избранные главы вариационного исчисления. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород, 2012. – 69 с.
- [2] Ожегова А.В., Насибуллина Р.Г. Вариационное исчисление. Задачи, алгоритмы, примеры. Казань, 2013. – 40 с.