

## Лабораторная работа 6. Метод начальных параметров решения простейшей задачи вариационного исчисления.

Поиск экстремали в простейшей задаче вариационного исчисления

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Эйлера), дополненного краевыми условиями. Суть метода начальных параметров заключается в подмене краевой задачи задачей с начальными условиями (задачей Коши). Для решения задачи Коши существует множество приближенных методов, не использующих символьные вычисления. Эти методы могут быть реализованы в различных прикладных программах и с помощью различных языков программирования, которые, кроме арифметических операций, поддерживают также вызов элементарных математических функций.

### 1. Сведение дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка

Отметим, что для всех вариантов заданий из лабораторной работы 2 (задание а)) уравнение Эйлера может быть сведено к виду дифференциального уравнения второго порядка, разрешенного явно относительно второй производной,

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (6.1)$$

С помощью замены переменных

$$v_1 = y, \quad v_2 = y'$$

дифференциальное уравнение (6.1) примет вид системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} v_1' = v_2, \\ v_2' = f(x, v_1, v_2). \end{cases}$$

Если, кроме значения функции  $y(x_1) = v_1(x_1)$ , определить значение производной  $y'(x_1) = v_2(x_1)$ , то полученную задачу Коши, как будет показано далее, можно решить приближенно.

### 2. Приближенное решение задачи Коши методом Рунге-Кутты

Основная идея методов приближенного решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (6.2)$$

состоит в следующем: производится разбиение отрезка решения задачи с заданным шагом, производная неизвестной функции заменяется разностной производной, затем значения приближенного решения последовательно от начального условия вычисляются в узлах разбиения.

Воспользуемся в данной лабораторной работе одним из таких методов, а, именно, методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i; \quad \Delta y_i = h \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, \quad \text{где } i = 0, 1, \dots,$$
$$k_1 = f(x_i, y_i); \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right); \quad k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right); \quad k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3),$$

который реализован в системе Maxima в виде функции

$$\text{rk}(\text{[ODE1, ..., ODEn]}, [\text{y1, ..., yn}], [\text{init1, ..., initn}], \text{domain}),$$

где **ODE1, ..., ODEn** – компоненты правой части системы (6.2); **y1, ..., yn** – зависимые переменные; **init1, ..., initn** – начальные условия, соответствующие зависимым переменным; **domain** – список из четырех элементов **[x, x1, x2, h]**, в котором **x** – независимая переменная, **x1** и **x2** – левая и правая граница области решения, **h** – шаг разбиения.

**Пример.**

Решить задачу Коши  $y'' = y' + y + x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$  методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Решение. С помощью замены переменных приведем заданное дифференциальное уравнение к системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} v_1' = v_2, \\ v_2' = v_2 + v_1 + x \end{cases}$$

и воспользуемся функцией  $\text{rk}(\dots)$ :

$x1: 0; y1: 1; dy1: 2; /* \text{начальные условия} */$

$h: 0.1; /* \text{шаг разбиения} */$

$x2: 3; /* \text{некоторая правая граница области решения} */$

$\text{rk}([v2, v2+v1+x],[v1,v2],[y1, dy1],[x, x1, x2, h]);$

### 3. Переход от краевой задачи к задаче Коши

Если система дифференциальных уравнений (6.2) **линейная** (даже с переменными коэффициентами), то вектор решений в любой точке  $y(x_2)$  также будет **линейно** зависеть от начальных условий (см. формулу Коши для решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений):

$$y(x_2) = Ay(x_1) + b,$$

где  $A$  – матрица  $n$  на  $n$ ,  $b$  –  $n$ -мерный вектор. Для исходного дифференциального уравнения (6.1), если оно является линейным, это означает выполнение равенства

$$y(x_2) = a y'(x_1) + b, \quad a, b \in R,$$

т.е. решение на правом конце отрезка (при фиксированном  $y(x_1)$ ) линейно зависит от производной на левом конце отрезка, и искомое значение производной может быть вычислено как

$$y'(x_1) = \frac{y(x_2) - b}{a}. \quad (6.3)$$

Однако значения коэффициентов  $a$  и  $b$  неизвестны и подлежат определению. Определим их следующим образом. Сначала возьмем  $y(x_1) = y_1$  и, положив  $y'(x_1) = 0$ , построим решение по методу Рунге-Кутты до  $x_2$  и получим, что  $b = y^0(x_2)$ , где  $y^0(x)$  – решение соответствующее начальным условиям  $y(x_1) = y_1$ ,  $y'(x_1) = 0$ . Затем, положив  $y'(x_1) = 1$ , опять построим решение по методу Рунге-Кутты до  $x_2$  и получим, что  $a + b = y^1(x_2)$ , где  $y^1(x)$  – решение соответствующее начальным условиям  $y(x_1) = y_1$ ,  $y'(x_1) = 1$ . Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} b = y^0(x_2), \\ a + b = y^1(x_2), \end{cases}$$

найдем искомые коэффициенты  $a$  и  $b$ . С помощью формулы (6.3) определим недостающее начальное условие.

### 4. Построение дискретного и непрерывного графика в одном графическом окне

Результатом вычислений по методу Рунге-Кутты является список точек, по которому строится ломаная (приближенное решение). Для того чтобы сравнить приближенное решение с точным решением (из лабораторной работы 2) необходимо построить их графики.

Приведем пример того, как это можно сделать. Построим график функции  $y = \sin(x)$  и график табличной функции (фактически списка точек)

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	1	0.5	0	0.5	1	0.5	0

на отрезке  $[0,3]$ :

```
list: [[0,1], [0.5, 0.5], [1,0], [1.5, 0.5], [2,1], [2.5,0.5], [3,0]];
func: sin(x);
plot2d ([[discrete, list], func], [x, 0, 3], [xlabel,"x"],[ylabel,"y"]);
```

**Замечание к примеру.**

Функция `gk(...)` для заданий из данной лабораторной работы возвращает список, каждым элементом которого является список из трех элементов  $[x, y, y']$ . Для того чтобы сформировать список, состоящий из пар  $[x, y]$ , можно воспользоваться следующей конструкцией

```
makelist ([p[1],p[2]], p, sol_rk);
```

где `sol_rk` – решение, полученное с помощью функции `gk(...)`.

## **5. Задание**

Для своего варианта из лабораторной работы 2 (задача **а**)) с помощью метода начальных параметров найти экстремаль. Сравнить полученное приближенное решение с экстремалью из лабораторной работы 2 (задача **а**)), построив их графики.