

Лабораторная работа 1. Решение дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$, т.е. уравнение вида $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$, где F – заданная функция.

Если искомая функция $y = y(x)$ является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в него производных. Решением дифференциального уравнения n -го порядка на интервале $[a, b]$ называется функция $y = y(x)$, определенная на $[a, b]$ вместе со своими производными до n -го порядка включительно, и такая, что подстановка функции $y = y(x)$ в дифференциальное уравнение превращает последнее в тождество для всех x из $[a, b]$.

Решение дифференциальных уравнений может быть получено в аналитическом или численном виде. Под аналитическим решением понимают такие решения, в которых неизвестная функция выражена (явно или неявно) через независимые переменные и параметры в виде формул, бесконечных рядов или интегралов. Под численным решением понимают решения разностного уравнения (или систем разностных уравнений), которое было получено после дискретизации исходного дифференциального уравнения.

Одной из программ, позволяющей находить решение дифференциальных уравнений, как в численном, так и в аналитическом виде является свободно распространяемая система компьютерной математики Maxima.

1. Общие сведения о работе в программе Maxima

1) Для вычисления содержимого ячейки ввода необходимо нажать комбинацию клавиш Ctrl+Enter.

2) Инициализация переменных производится с помощью двоеточия «:». Например,

`a:1;`

`expr: x^2+sin(x);`

3) В системе Maxima предусмотрена возможность ввода сразу нескольких команд в одной ячейке ввода. Для этого команды отделяются друг от друга символом « ; ».

Для обозначения конца ввода команды вместо « ; » можно использовать знак « \$ ». Это бывает удобно в том случае, когда не надо выводить результата вычисления на экран (результат при этом все равно будет вычисляться).

4) Значения имен переменных сохраняются на протяжении всей работы с документом. Поэтому, если необходимо снять определение с переменной, то это можно сделать с помощью функции **kill(name)**, где **name** – имя удаляемого выражения, переменной или ячейки. Точно так же можно очистить всю память и освободить все имена, введя команду **kill(all)**.

2. Функция desolve

Функция **desolve (eqn, y(x))** — ищет частные решения линейных дифференциальных уравнений. Аргументы функции: **eqn** – дифференциальное уравнение, которое может содержать **x** – независимую переменную, **y(x)** – искомую функцию, **diff(y(x),x)**, **diff(y(x),x,2),...,diff(y(x),x,n)** – производные функции $y(x)$. Если не заданы значения функции и ее производных в нуле, то в найденном решении они отображаются в виде $y(0)$ и

$\frac{d}{dx} y(x)|_{x=0}, \frac{d^2}{dx^2} y(x)|_{x=0}, \dots, \frac{d^n}{dx^n} y(x)|_{x=0}$, соответственно. Если же начальные условия в $x=0$ известны, то они могут быть определены до вызова функции **desolve** с помощью функции **atvalue**:

atvalue(expr, x=0, value),

где **expr** – это $y(x)$ или значение k -той производной $\text{diff}(y(x), x, k)$, где $k \leq n$; **x** – независимая переменная; **value** – начальное значение **expr** (т.е. значение функции или ее k -той производной в нуле).

Пример 1. Найти решение задачи Коши $y' = \cos x$, $y(0) = 4$.

Решение. Зададим уравнение и обозначим его **eqn**:

eqn: diff(y(x), x) = cos(x)

Определим начальное условие

atvalue(y(x), x=0, 4)

Воспользуемся функцией **desolve**

desolve(eqn, y(x));

$y(x) = \sin(x) + 4$.

Пример 2. Найти решение задачи Коши $y'' = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Действуем аналогично примеру 1, но дополнительно к этому задаем начальное значение производной искомой функции:

eqn: diff(y(x), x, 2) = 1

atvalue(y(x), x=0, 1)

atvalue(diff(y(x), x), x=0, 2)

desolve(eqn, y(x));

$y(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 1$.

Для того, чтобы найти частное решение системы n ($n > 1$) линейных дифференциальных уравнений первого и/или второго порядков, необходимо передать функции **desolve** в качестве аргументов список из n дифференциальных уравнений и n искомых функций, соответственно:

desolve ([eqn_1, ..., eqn_n], [y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]);

Пример 3. Найти решение задачи Коши $\begin{cases} y' = z \\ z' = \sin x \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.

Решение. Зададим уравнения и обозначим их **eqn1** и **eqn2**

eqn1: diff(y(x), x) = z(x)

eqn2: diff(z(x), x) = sin(x)

Определим начальные условия

atvalue(y(x), x=0, 1)

atvalue(z(x), x=0, 2)

Воспользуемся функцией **desolve**

desolve([eqn1, eqn2], [y(x), z(x)]);

$[y(x) = -\sin(x) + 3x + 1, z(x) = 3 - \cos(x)]$.

3. Функция ode2

Функция **ode2(eqn, dvar, ivar)** — предназначена для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Решение ищется в общем виде. Аргументы функции: **eqn** – дифференциальное уравнение, **dvar** – зависимая переменная, **ivar** – независимая переменная. Данная функция может вернуть решение в явном или неявном виде.

В списке параметров этой функции зависимая переменная указывается явно, поэтому обозначение вида $y(x)$ не обязательно. Функция и переменная могут обозначаться одиночными буквами, например, y и x . Однако в этом случае перед производной необходимо ставить апостроф (т.е. '**diff(y,x)**'), чтобы получить не вычисляемую форму выражения (noun form). Иначе выражение **diff(y,x)** обнулится (т.к. y является константой относительно x).

По умолчанию произвольная константа в общем решении уравнения первого порядка обозначается как %c. В общем решении уравнения второго порядка константы обозначаются как %k1 и %k2.

Для поиска частных решений на основе общих решений, полученных с помощью функции ode2, существуют три функции: **ic1**, **ic2**, **bc2**. Функции **ic1**, **ic2** служат для решения задачи Коши, т.е. задачи с начальными условиями. Функция **bc2** служит для решения краевой задачи, т.е. задачи, где значения искомой функции заданы на концах некого отрезка.

Замечание. Функции **ic1** и **ic2** не поддерживают работу с общими решениями, где явно указана зависимость $y(x)$.

1. Функция **ic1(solution, xval, yval)** — предназначена для поиска частного решения дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием. Аргументы функции: **solution** – общее решение уравнения, найденное с помощью функции ode2, **xval** – начальное значение независимой переменной в форме $x = x_0$, **yval** – начальное значение зависимой переменной в форме $y = y_0$.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + x$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Найдем общее решение и обозначим его sol:

sol: ode2('diff(y,x)=x^2+x,y,x);

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \%c.$$

Затем с помощью функции **ic1** найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 0$:

ic1(sol,x=1,y=0);

$$y = \frac{-5 + 3x^2 + 2x^3}{6}.$$

2. Функция **ic2(solution, xval, yval, dval)** — предназначена для поиска частного решения дифференциального уравнения второго порядка с начальными условиями. Аргументы функции: **solution** - общее решение уравнения, найденное с помощью функции ode2, **xval** — начальное значение независимой переменной в форме $x = x_0$, **yval** — начальное значение зависимой переменной в форме $y = y_0$, **dval** — начальное значение для производной зависимой переменной в форме '**diff(y, x) = dy0**'.

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1, y'(0) = 3$.

Решение. Зададим уравнение и обозначим его eqn

eqn: 'diff(y,x,2)-7*diff(y,x)+6*y=0;

$$\frac{d^2}{dx^2} y - 7 \left(\frac{d}{dx} y \right) + 6y = 0.$$

Затем найдем общее решение и обозначим его sol:

sol: ode2(eqn,y,x);

$$y = \%k1 * \%e^{6x} + \%k2 * \%e^x.$$

Воспользуемся функцией ic2:

ic2(sol, x=0, y=1, 'diff(y,x)=3);

$$y = \frac{2 * \%e^{6x}}{5} + \frac{3 * \%e^x}{5}.$$

3. Функция **bc2(solution, xval1, yval1, xval2, yval2)** — предназначена для нахождения решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Аргументы функции: **solution** — общее решение уравнения, найденное с помощью функции ode2; **xval1** — значение независимой переменной на левой границе в форме $x=x1$, **yval1** — значение зависимой переменной соответствующее $x1$ в форме $y=y1$; **xval2, yval2** – граничное условие на правой границе, которое задается в той же форме, что и граничное условие на левой границе.

Пример 6. Найти решение краевой задачи $y'' - 7y' + 6y = 0, y(0) = 1, y(2) = 5$.

Решение. Найдем общее решение sol как это сделано в примере 5. Затем воспользуемся функцией bc2 для решения краевой задачи:

bc2(sol, x=0, y=1, x=2, y=5);

$$y = \frac{(\%e^{12} - 5) * \%e^x}{(\%e^{12} - \%e^2)} - \frac{(\%e^2 - 5) * \%e^{6x}}{(\%e^{12} - \%e^2)}.$$

Замечание. Покажем, как будет выглядеть решение краевой задачи из примера 6 в случае, если явно указать зависимость $y(x)$:

eqn: diff(y(x),x,2)-7*diff(y(x),x)+6*y(x)=0;

sol: ode2(eqn,y(x),x);

bc2(sol, x=0, y(0)=1, x=2, y(2)=5);

4. Построение графиков с помощью функции plot2d

Для построения графиков на плоскости можно воспользоваться функцией **plot2d** со следующим набором аргументов:

plot2d(expr, [x, x_min, x_max]),

expr функция, график которой нужно построить; **x** — переменная, от которой зависит выражение expr; **x_min** и **x_max** задают отрезок оси X для построения графика, участок по оси Y выбирается автоматически, исходя из минимального и максимального значений функции на отрезке $[x_min, x_max]$.

Чтобы построить в одном графическом окне одновременно n графиков ($n > 1$), функции plot2d вместо одного выражения следует передать в качестве аргумента список из n выражений:

plot2d([expr_1, expr_2,...,expr_n], [x, min, max]).

Существует также функция **wxplot2d** (с тем же самым списком параметров), которая в отличие от функции **plot2d**, открывающей отдельное графическое окно с графиком функции, вставляет график внутрь рабочей области документа.

Пример 7. Построить график функции $y(x) = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. `plot2d(sin(x),[x,0,%pi],[xlabel,"x"],[ylabel,"y(x)"]);`

Замечание. Для того, чтобы построить график решения дифференциального уравнения (см. предыдущие примеры) необходимо воспользоваться функцией **rhs(...)**, которая вернет часть выражения, стоящую справа от знака равенства. Например,

`expr: y=x^2;`

$$y = x^2$$

`rhs(expr);`

$$x^2$$

Пример 8. Построить графики решений $y(x)$ и $z(x)$ из примера 3 на отрезке $[0, 3]$.

Решение. Прежде всего, запишем решение системы в переменную **sol**:

`sol: desolve([eqn1,eqn2],[y(x),z(x)]);`

Далее

`plot2d([rhs(sol[1]),rhs(sol[2])],[x,0,3]);`

5. Задания

Для своего варианта найти решения задач Коши **a)**, **b)** и краевой задачи **с)**. Построить графики решений для **a)** (на отрезке $[0, 3]$), для **b)** (на отрезке $[x_0, x_0 + 3]$, где x_0 – начальное значение x) и **с)** (на отрезке $[x_1, x_2]$, где x_1, x_2 – граничные значения x).

Вариант 1.

a).
$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

b). $y'' - y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

c). $y'' - 3y' + 4y = \cos^2 x, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 3.$

Вариант 2.

a).
$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y - e^{-x} \end{cases}, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3.$$

b). $y'' - y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

c). $y'' - 3y' + 4y = x^2, \quad y(1) = 1, \quad y(5) = -1.$

Вариант 3.

a).
$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y + e^{-x} \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

b). $y'' - y = e^x, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1.$

c). $y'' - 3y' + 4y = \cos x, \quad y(-1) = 2, \quad y(2) = -1.$

Вариант 4.

- a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y + x \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -1.$
- b). $y'' - y = e^{-x}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$
- c). $y'' - 3y' + 4y = \sin x, \quad y(0) = -1, \quad y(5) = 2.$

Вариант 5.

- a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y + x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1.$
- b). $y'' - y = x^2, \quad y(-1) = -2, \quad y'(-1) = 2.$
- c). $y'' - 3y' + 4y = 0, \quad y(-3) = 1, \quad y(2) = 3.$

Вариант 6.

- a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3.$
- b). $y'' + y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -2.$
- c). $y'' - 3y' + 2y = x^2, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$

Вариант 7.

- a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y + \sin x \end{cases}, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 2.$
- b). $y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
- c). $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(1) = -2, \quad y(3) = 0.$

Вариант 8.

- a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y + \cos x \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$
- b). $y'' + y = \cos x, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1.$
- c). $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}, \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = -1.$

Вариант 9.

- a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y + x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -1.$
- b). $y'' + y = x^2, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$
- c). $y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = -3, \quad y(2) = -2.$

Вариант 10.

- a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y + \cos^2 x \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1.$
- b). $y'' + y = \sin^2 x, \quad y(-1) = -2, \quad y'(-1) = 2.$

c). $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(-2) = 3, \quad y(1) = 0.$

Вариант 11.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$

b). $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

c). $y'' + y = \sin^2 x, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = -1.$

Вариант 12.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = y + x \end{cases}, \quad y(0) = -2, \quad z(0) = 1.$

b). $y'' - 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

c). $y'' + y = x^2, \quad y(-1) = 2, \quad y(4) = -1.$

Вариант 13.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = y + e^x \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$

b). $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1.$

c). $y'' + y = \cos x, \quad y(-4) = 1, \quad y(0) = 0.$

Вариант 14.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = y + e^{-x} \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

c). $y'' + y = \sin x, \quad y(-3) = 0, \quad y(2) = 2.$

Вариант 15.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = y + x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' - 3y' + 2y = x^2, \quad y(-1) = -2, \quad y'(-1) = 2.$

c). $y'' + y = 0, \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = -2.$

Вариант 16.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$

b). $y'' - 3y' + 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

c). $y'' - y = x^2, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 3.$

Вариант 17.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y + \sin x \end{cases}, \quad y(0) = 3, \quad z(0) = 1.$

b). $y'' - 3y' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

c). $y'' - y = e^{-x}, \quad y(1) = 1, \quad y(5) = -1.$

Вариант 18.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y + \cos x \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3.$

b). $y'' - 3y' + 4y = \cos x, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1.$

c). $y'' - y = e^x, \quad y(-1) = 2, \quad y(2) = -1.$

Вариант 19.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y + x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' - 3y' + 4y = x^2, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

c). $y'' - y = x, \quad y(0) = -1, \quad y(5) = 2.$

Вариант 20.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y + \sin^2 x \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' - 3y' + 4y = \cos^2 x, \quad y(-1) = -2, \quad y'(-1) = 2.$

c). $y'' - y = 0, \quad y(-3) = 1, \quad y(2) = 3.$

Литература

[1] Губина Т. Н., Андропова Е.В. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики Mathima: учебное пособие. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2009. – 99 с.